Zadatak 081 (Ella, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|}.$

Rješenje 081

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koju je nazivnik jednak nuli.

$$|x|=a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_1=-a \\ x_2=a\end{matrix}\right\}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\quad,\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\ne 0\ \Rightarrow\ x\ne 2.$$

Sada vrijedi:

$$\frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\ /\cdot 6\cdot|x-2|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4+6\cdot|x-2|=9\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=9-4\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=5\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=5\ /:6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x-2|=\frac{5}{6}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x-2=-\frac{5}{6} \\ x-2=\frac{5}{6}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{6}+2 \\ x=\frac{5}{6}+2\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \\ x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x=\frac{-5+12}{6} \\ x=\frac{5+12}{6}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_1=\frac{7}{6} \\ x_2=\frac{17}{6}\end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|} \Rightarrow \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}-\frac{2}{3\cdot|x-2|} \Rightarrow 1=\frac{9-4}{6\cdot|x-2|} \Rightarrow 1=\frac{5}{6\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{5}{6\cdot|x-2|}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6\cdot|x-2|}=1 \;/\cdot\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|}=\frac{6}{5}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2.$$

Sada vrijedi:

$$\frac{1}{|x-2|}=\frac{6}{5} \Rightarrow |x-2|=\frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=-\frac{5}{6} \\ x-2=\frac{5}{6}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{5}{6}+2 \\ x=\frac{5}{6}+2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \\ x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{-5+12}{6} \\ x=\frac{5+12}{6}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{7}{6} \\ x_2=\frac{17}{6}\end{array}\right\}.$$

3.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|} \Rightarrow \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2.$$

Sada promatramo dva slučaja:

1. slučaj

$$x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow |x-2|=x-2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|} \\ |x-2|=x-2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot(x-2)}+1=\frac{3}{2\cdot(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\cdot(x-2)}+1=\frac{3}{2\cdot(x-2)} \;/\cdot 6\cdot(x-2) \Rightarrow 4+6\cdot(x-2)=9 \Rightarrow 6\cdot(x-2)=9-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot(x-2)=5 \Rightarrow 6\cdot(x-2)=5 \;/:6 \Rightarrow x-2=\frac{5}{6} \Rightarrow x=\frac{5}{6}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \Rightarrow x=\frac{5+12}{6} \Rightarrow x_1=\frac{17}{6}$$

jer je uvjet x > 2 zadovoljen.

2. slučaj

$$x-2<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \Rightarrow |x-2|=-x+2 \Rightarrow |x-2|=2-x.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\\ |x-2|=2-x\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{3\cdot(2-x)}+1=\frac{3}{2\cdot(2-x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\cdot(2-x)}+1=\frac{3}{2\cdot(2-x)}\ /\cdot 6\cdot(2-x)\Rightarrow 4+6\cdot(2-x)=9\Rightarrow 6\cdot(2-x)=9-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot(2-x)=5\Rightarrow 6\cdot(2-x)=5\ /:6\Rightarrow 2-x=\frac{5}{6}\Rightarrow -x=\frac{5}{6}-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=\frac{5}{6}-\frac{2}{1}\Rightarrow -x=\frac{5-12}{6}\Rightarrow -x=-\frac{7}{6}\Rightarrow -x=-\frac{7}{6}\ /\cdot(-1)\Rightarrow x_2=\frac{7}{6}$$

jer je uvjet $x < 2$ zadovoljen.

Vježba 081

Riješi jednadžbu $\frac{2}{|x-2|}-1=\frac{1}{2\cdot|x-2|}$.

Rezultat: $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{7}{2}$.

Zadatak 082 (Iva ☺, maturantica TUPŠ - a)

Riješi jednadžbu $|x-2|=2\cdot x-1$.

Rješenje 082

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba

$$|x|=a$$

- ima dva rješenja $x_1 = a$ i $x_2 = -a$ ako je $a > 0$
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$
- nema rješenja ako je $a < 0$.

1.inačica

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	
Uvjet: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ $\lvert x-2 \rvert = x-2$	Uvjet: $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$ $\lvert x-2 \rvert = -(x-2)$
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x - 2 \cdot x = -1 + 2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$-(x-2) = 2 \cdot x - 1$ $-x + 2 = 2 \cdot x - 1$ $-x - 2 \cdot x = -1 - 2$ $-3 \cdot x = -3$ $-3 \cdot x = -3 \ /: (-3)$ $x = 1$
Zbog uvjeta $x \geq 2$ slijedi da x = – 1 nije rješenje jednadžbe.	Zbog uvjeta $x < 2$ slijedi da x = 1 je rješenje jednadžbe.

2.inačica
Pretpostavimo li kao pri rješavanju jednadžbe $\lvert x \rvert = a$ dobije se:

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x - 2 \cdot x = -1 + 2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$x - 2 = -(2 \cdot x - 1)$ $x - 2 = -2 \cdot x + 1$ $x + 2 \cdot x = 1 + 2$ $3 \cdot x = 3$ $3 \cdot x = 3 \ /: 3$ $x = 1$

Provjeravamo rješenja, tj. izvršimo pokus.

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$
$x = -1$	$x = 1$
$\lvert -1-2 \rvert = 2 \cdot (-1) - 1$ $\lvert -3 \rvert = -2 - 1$ $3 = -3$ nije istinito	$\lvert 1-2 \rvert = 2 \cdot 1 - 1$ $\lvert -1 \rvert = 2 - 1$ $1 = 1$ istinito
$x = -1$ nije rješenje jednadžbe.	$x = 1$ je rješenje jednadžbe.

Vježba 082

Riješi jednadžbu $\lvert 2 - x \rvert = 2 \cdot x - 1.$

Rezultat: x = 1.

Zadatak 083 (Marija, gimnazija)

Riješi nejednadžbu $\lvert x \rvert > x.$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a > b\ ,\ c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

U zadanoj nejednadžbi $|x| > x$ postoje dvije mogućnosti:

- $x < 0$
- $x > 0.$

Dakle, pojavljuju se dva intervala $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$ za koje dana nejednadžba ima dva različita zapisa.

Za x < 0 nejednadžba ima oblik

$$\left.\begin{matrix} |x| > x \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x > x \Rightarrow -x - x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \ /:(-2) \Rightarrow x < 0.$$

Zbog uvjeta x < 0 rješenje je:

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Za x > 0 nejednadžba ima oblik

$$\left.\begin{matrix} |x| > x \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > x \ \textit{nema smisla}.$$

Prikaz pomoću tablice.

$\|x\| > x$	
Uvjet: $x < 0$, $\|x\| = -x$	Uvjet: $x > 0$, $\|x\| = x$
$-x > x$ $-x - x > 0$ $-2 \cdot x > 0$ $-2 \cdot x > 0 \ /:(-2)$ $x < 0$	$x > x$ nema smisla
Zbog uvjeta $x < 0$ slijedi $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$.	Nema rješenja.

Rješenje nejednadžbe je $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$.

Vježba 083

Riješi nejednadžbu $|x| - x > 0.$

Rezultat: $x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$

Zadatak 084 (Vlado, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednadžba $\big|2 - |1 - |x||\big| = 1$?

Rješenje 084

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = a \;,\; a > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{array} \right\}.$$

$$\big|2 - |1 - |x||\big| = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - |1 - |x|| = 1 \\ 2 - |1 - |x|| = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = 1 - 2 \\ -|1 - |x|| = -1 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = -1 \\ -|1 - |x|| = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = -1 \;/\cdot(-1) \\ -|1 - |x|| = -3 \;/\cdot(-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |1 - |x|| = 1 \\ |1 - |x|| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - |x| = 1 \\ 1 - |x| = -1 \\ 1 - |x| = 3 \\ 1 - |x| = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 1 - 1 \\ -|x| = -1 - 1 \\ -|x| = 3 - 1 \\ -|x| = -3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 0 \\ -|x| = -2 \\ -|x| = 2 \\ -|x| = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 0 \;/\cdot(-1) \\ -|x| = -2 \;/\cdot(-1) \\ -|x| = 2 \;/\cdot(-1) \\ -|x| = -4 \;/\cdot(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| = 2 \\ |x| = -2 \\ |x| = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm 2 \\ |x| = -2 \text{ nema smisla} \\ x_{4,5} = \pm 4 \end{array} \right\}.$$

Ima pet rješenja.

Vježba 084

Koliki je zbroj svih rješenja jednadžbe $\big|2 - |1 - |x||\big| = 1$?

Rezultat: 0.

Zadatak 085 (Antun, gimnazija)

$$\text{Za } x<0 \text{ razlomak } \frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}} \text{ jednak je:}$$

$$A.\ 1 \qquad B.\ x+\sqrt{2} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ \sqrt{2}-x$$

Rješenje 085

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{8}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{4\cdot 2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}}=$$

$$=\left[\ x<0 \ \Rightarrow \ x-\sqrt{2}<0\ \right]=\frac{-\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\frac{-\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=-1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 085

$$\text{Za } x>\sqrt{2} \text{ razlomak } \frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}} \text{ jednak je:}$$

$$A.\ 1 \qquad B.\ x+\sqrt{2} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ \sqrt{2}-x$$

Rezultat: A.

Zadatak 086 (Paula, srednja škola)

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x|$?

$A.\ -7 \cdot x - 2 \qquad B.\ -3 \cdot x + 4 \qquad C.\ 3 \cdot x - 4 \qquad D.\ 7 \cdot x + 2$

Rješenje 086

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, vrijedi:

- izraz 2 · x + 3 je pozitivan
- izraz 1 – 5 · x je negativan.

$$x \in \langle 1, 3 \rangle \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2 \cdot x + 3 > 0 \\ 1 - 5 \cdot x > 0 \end{matrix} \right\}.$$

Sada je

$$|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x| = \left| \underbrace{2 \cdot x + 3}_{+} \right| + \left| \underbrace{1 - 5 \cdot x}_{-} \right| = 2 \cdot x + 3 - (1 - 5 \cdot x) =$$

$$= 2 \cdot x + 3 - 1 + 5 \cdot x = 7 \cdot x + 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 086

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|3 \cdot x + 3| + |1 - 4 \cdot x|$?

$A.\ -7 \cdot x - 2 \qquad B.\ -3 \cdot x + 4 \qquad C.\ 3 \cdot x - 4 \qquad D.\ 7 \cdot x + 2$

Rezultat: D.

Zadatak 087 (Paula, gimnazija)

Riješimo jednadžbu: $\frac{1}{|x - 3|} + 4 = \frac{2}{|3 - x|}, \ x \ne 3.$

Rješenje 087

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|a-b| = |b-a| \quad , \quad |x| = a \, , \, a \ge 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{array}\right\} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{2}{|x-3|} - \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = 4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = \frac{4}{1} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{array}\right\}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \; / \cdot |x-3| \Rightarrow 1 + 4 \cdot |x-3| = 2 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \; / \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{array}\right\}.$$

3.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ t = \frac{1}{|x-3|} \end{array} \right] \Rightarrow t + 4 = 2 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t = t + 4 \Rightarrow 2 \cdot t - t = 4 \Rightarrow t = 4.$$

Vraćamo se na zamjenu.

$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{|x-3|} \\ t=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|}=4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|}=\frac{4}{1} \Rightarrow |x-3|=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3=-\dfrac{1}{4} \\ x-3=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+3 \\ x=\dfrac{1}{4}+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{1} \\ x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+12}{4} \\ x=\dfrac{1+12}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{11}{4} \\ x_2=\dfrac{13}{4} \end{array}\right\}.$$

Vježba 087

Riješimo jednadžbu: $\dfrac{1}{2\cdot|x-3|}+2=\dfrac{1}{|3-x|}$, $x\neq 3$.

Rezultat: $x_1=\dfrac{11}{4}$, $x_2=\dfrac{13}{4}$.

Zadatak 088 (Ante, srednja škola)

Ako je $a^2+b^2=1$ onda je $-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}$.

Rješenje 088

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |x|\leq a\ ,\ a\geq 0 \Rightarrow -a\leq x\leq a.$$

$$a^2\geq 0\ ,\ a\in R \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\geq b \Rightarrow a+c\geq b+c\ ,\ c\in R.$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a\leq b \Rightarrow \sqrt{a}\leq\sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{pribrojimo} \\ a^2+b^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b\ /+a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2+a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b+a^2+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2\geq a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow 2\cdot\left(a^2+b^2\right)\geq(a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le 2\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=1\end{matrix}\right] \Rightarrow (a+b)^2 \le 2\cdot 1 \Rightarrow (a+b)^2 \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le 2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{(a+b)^2} \le \sqrt{2} \Rightarrow |a+b| \le \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \le a+b \le \sqrt{2}.$$

Vježba 088

Ako je $a^2+b^2-1=0$ onda je $-\sqrt{2} < a+b < \sqrt{2}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 089 (Mislav, srednja škola)

Ako je $a^2+b^2=1$ i $c^2+d^2=1,$ onda je $|a\cdot c-b\cdot d| \le 1.$

Rješenje 089

Ponovimo!

$$a^2 \ge 0\ ,\ a \in R \quad , \quad (a+b)^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a \ge b\ ,\ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \quad , \quad a \ge b\ ,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x=0.$$

$$|x| \le a\ ,\ a \ge 0 \Rightarrow -a \le x \le a.$$

Očigledne nejednakosti

$$\left.\begin{matrix}(a+c)^2+(b-d)^2 \ge 0\\ (a-c)^2+(b+d)^2 \ge 0\end{matrix}\right\}$$

preoblikujemo tako da se dobije:

$$\left.\begin{matrix}(a+c)^2+(b-d)^2 \ge 0\\ (a-c)^2+(b+d)^2 \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a^2+2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot d+d^2 \ge 0\\ a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2+2\cdot b\cdot d+d^2 \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot c-2\cdot b\cdot d \ge 0\\ a^2+b^2+c^2+d^2-2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot d \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ \left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=1\ ,\ c^2+d^2=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1+1+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ 1+1-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ 2-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\\ -2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\ /:2\\ -2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\ /:(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\cdot c-b\cdot d\geq -1\\ a\cdot c-b\cdot d\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\leq a\cdot c-b\cdot d\leq 1\ \Rightarrow\ |a\cdot c-b\cdot d|\leq 1.$$

Vježba 089

Ako je $a^2+c^2=1$ i $b^2+d^2=1$, onda je $|a\cdot c-b\cdot d|\leq 1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 090 (Help, gimnazija)

Izračunaj $|||x-1|-2|-3|$ za $x=\pi$.

Rješenje 090

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|a-b|=a-b\ ,\ a-b\geq 0\quad ,\quad |a-b|=-(a-b)=b-a\ ,\ a-b<0.$$

$$|||x-1|-2|-3|=\left[\begin{array}{c}x=\pi\\ \pi\approx 3.14\end{array}\right]=|||\pi-1|-2|-3|=\Bigg|\Big|\big|\underbrace{\pi-1}_{+}\big|-2\Big|-3\Bigg|=$$

$$=||\pi-1-2|-3|=||\pi-3|-3|=\Big|\big|\underbrace{\pi-3}_{+}\big|-3\Big|=|\pi-3-3|=|\pi-6|=$$

$$=|\underbrace{\pi-6}_{-}|=-(\pi-6)=-\pi+6=6-\pi.$$

Vježba 090

Izračunaj $\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|$ za $x=4$.

Rezultat: 2.

Zadatak 091 (Help, gimnazija)

Izračunaj $\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|$ za $x=\sqrt{3}$.

Rješenje 091

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|a-b|=a-b \;,\; a-b\ge 0 \quad , \quad |a-b|=-(a-b)=b-a \;,\; a-b<0.$$

$$\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|=\left[\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\approx 1.73 \end{matrix}\right]=\left|\sqrt{3}-3\right|-\left|\sqrt{3}-2\right|-\left|\sqrt{3}-1\right|=$$

$$=\Big|\underbrace{\sqrt{3}-3}_{-}\Big|-\Big|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{-}\Big|-\Big|\underbrace{\sqrt{3}-1}_{+}\Big|=-\left(\sqrt{3}-3\right)-\left(-\left(\sqrt{3}-2\right)\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=-\sqrt{3}+3+\left(\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{3}+1=-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1=$$

$$=-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1=3-2-\sqrt{3}+1=2-\sqrt{3}.$$

Vježba 091

Izračunaj $\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|$ za $x=2$.

Rezultat: 0.

Zadatak 092 (Matej, gimnazija)

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$. Odredite na tom pravcu skup svih točaka T za koje vrijedi: $\left|\left|OA\right|-\left|OT\right|\right|\le 2$.

Rješenje 092

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| \geq 0 \ , \ x \in R \quad , \quad |x| \leq a \ , \ a > 0 \ \Rightarrow \ -a \leq x \leq a \quad , \quad a \leq b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c \leq b + c.$$

$$a \leq b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \geq b \cdot c \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1)$ i $B(x_2)$ na brojevnom pravcu:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Točka O je ishodište pa ima koordinatu 0.

$$O(x_1) = O(0).$$

- Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$ pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O(x_1) = O(0) \\ A(x_2) = A\left(-\frac{2}{5}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |OA| = |x_2 - x_1|\ \right] \Rightarrow |OA| = \left|-\frac{2}{5} - 0\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OA| = \left|-\frac{2}{5}\right| \Rightarrow |OA| = \frac{2}{5}.$$

- Točka T na brojevnom pravcu ima koordinatu x pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O(x_1) = O(0) \\ T(x_2) = T(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |OT| = |x_2 - x_1|\ \right] \Rightarrow |OT| = |x - 0| \Rightarrow |OT| = |x|.$$

Budući da je uvjet u zadatku

$$\big||OA| - |OT|\big| \leq 2,$$

dalje slijedi:

$$\big||OA| - |OT|\big| \leq 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |OA| = \frac{2}{5} \\ |OT| = |x| \end{array}\right] \Rightarrow \left|\frac{2}{5} - |x|\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \ / -\frac{2}{5} \Rightarrow -2 - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq 2 - \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{1} - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{1} - \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-10-2}{5} \leq -|x| \leq \frac{10-2}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \ / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{12}{5} \geq |x| \geq -\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{8}{5} \leq |x| \leq \frac{12}{5} \Rightarrow \left[\ |x| \geq 0\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |x| \le \frac{12}{5} \ \Rightarrow \ -\frac{12}{5} \le x \le \frac{12}{5} \ \Rightarrow \ x \in \left[-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right].$$

Vježba 092

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$. Odredite na tom pravcu skup svih točaka T za koje vrijedi: $\left| |OA| - |OT| \right| = 2.$

Rezultat: $T_1\left(-\frac{12}{5}\right), T_2\left(\frac{12}{5}\right).$

Zadatak 093 (Marino i prijateljica Mirsada ☺, srednja škola)

Broj rješenja jednadžbe $9^{|3\cdot x-1|} = 3^{8\cdot x-2}$ je:

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rješenje 093

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$a \ge b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \quad , \quad a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \ \Rightarrow \ f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Svaki se razlomak (racionalan broj) može napisati kao decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom.

$$9^{|3\cdot x-1|} = 3^{8\cdot x-2} \ \Rightarrow \ \left(3^2\right)^{|3\cdot x-1|} = 3^{8\cdot x-2} \ \Rightarrow \ 3^{2\cdot|3\cdot x-1|} = 3^{8\cdot x-2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot|3\cdot x-1| = 8\cdot x-2 \ \Rightarrow \ 2\cdot|3\cdot x-1| = 8\cdot x-2 \ /:2 \ \Rightarrow \ |3\cdot x-1| = 4\cdot x-1.$$

Preoblikujemo jednadžbu u dva slučaja.

1. slučaj

$$3\cdot x-1 \ge 0 \ \Rightarrow \ 3\cdot x \ge 1 \ \Rightarrow \ 3\cdot x \ge 1 \ /:3 \ \Rightarrow \ x \ge \frac{1}{3}.$$

Sada je:

$$\left|3\cdot x-1\right|=4\cdot x-1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ 3\cdot x-1\geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3\cdot x-1=4\cdot x-1 \Rightarrow 3\cdot x-1=4\cdot x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x=4\cdot x \Rightarrow 3\cdot x-4\cdot x=0 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x\geq \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x=0 \text{ nije rješenje.}$$

2. slučaj

$$3\cdot x-1<0 \Rightarrow 3\cdot x<1 \Rightarrow 3\cdot x<1 \;/:3 \Rightarrow x<\frac{1}{3}.$$

Sada je:

$$\left|3\cdot x-1\right|=4\cdot x-1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ 3\cdot x-1<0 \end{bmatrix} \Rightarrow -(3\cdot x-1)=4\cdot x-1 \Rightarrow -3\cdot x+1=4\cdot x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot x-4\cdot x=-1-1 \Rightarrow -7\cdot x=-2 \Rightarrow -7\cdot x=-2 \;/:(-7) \Rightarrow x=\frac{2}{7}.$$

Uočimo da je

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{7}=0.2857... \\ \frac{1}{3}=0.3333... \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{7}<\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{7} \text{ je rješenje.}$$

Zadana jednadžba ima jedno rješenje.
Odgovor je pod B.

Vježba 093

Broj rješenja jednadžbe $4^{\left|3\cdot x-1\right|}=2^{8\cdot x-2}$ je:

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rezultat: B.

Zadatak 094 (Katarina, maturantica)

Koliki je **zbroj** svih rješenja jednadžbe $\left|\left|x-2\right|-4\right|=4$?

A. 6 *B.* 8 *C.* 10 *D.* 12

Rješenje 094

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|x| = a \;,\; a > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -a \\ x = a \end{matrix}\right\}.$$

$$||x-2|-4| = 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2|-4 = -4 \\ |x-2|-4 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2| = -4+4 \\ |x-2| = 4+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2| = 0 \\ |x-2| = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2 = 0 \\ x-2 = -8 \\ x-2 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ x = -8+2 \\ x = 8+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 10 \end{matrix}\right\}.$$

Zbroj svih rješenja iznosi:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 - 6 + 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 094

Koliki je **umnožak** svih rješenja jednadžbe $||x-2|-4| = 4$?

$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ -2$

Rezultat: C.

Zadatak 095 (Valentina, ekonomska škola)

Neka su x_1 i x_2 realni brojevi i f(x) = | x |. Tada je $f(x_1) = f(x_2)$ onda i samo onda ako je:

$A.\ x_1 = -x_2 \text{ ili } x_1 = x_2 \qquad B.\ x_1 = x_2 \qquad C.\ x_1 = -x_2 \qquad D.\ x_1 = x_2 = 0$

Rješenje 095

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = |y| \Rightarrow x = -y \text{ ili } x = y.$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow [\, f(x) = |x| \,] \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = -x_2 \text{ ili } x_1 = x_2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 095

Neka su x_1 i x_2 realni brojevi i f(x) = | x |. Tada je $f(x_1) - f(x_2) = 0$ onda i samo onda ako je:

$A.\ x_1 = -x_2 \text{ ili } x_1 = x_2 \qquad B.\ x_1 = x_2 \qquad C.\ x_1 = -x_2 \qquad D.\ x_1 = x_2 = 0$

Rezultat: A.

Zadatak 096 (Lily, bivša maturantica)

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\left|2\cdot x-3\right|-m\right|=m$ ako je parametar m > 0?

A. točno jedno *B*. točno dva *C*. točno tri *D*. točno četiri

Rješenje 096

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$\left|x\right|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$\left|x\right|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$\left|x\right|=0 \text{ za } x=0.$$

$$\left|x\right|=a \;,\; a> \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x=-a \\ x=a \end{array}\right\} \quad , \quad \left|x\right|=0 \;\Rightarrow\; x=0.$$

$$\left|\left|2\cdot x-3\right|-m\right|=m \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|-m=-m \\ \left|2\cdot x-3\right|-m=m \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|=-m+m \\ \left|2\cdot x-3\right|=m+m \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|=0 \\ \left|2\cdot x-3\right|=2\cdot m \end{array}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 2\cdot x-3=0 \\ 2\cdot x-3=-2\cdot m \\ 2\cdot x-3=2\cdot m \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=3 \\ 2\cdot x=-2\cdot m+3 \\ 2\cdot x=2\cdot m+3 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=3 \;/:2 \\ 2\cdot x=-2\cdot m+3 \;/:2 \\ 2\cdot x=2\cdot m+3 \;/:2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{-2\cdot m+3}{2} \\ x_3=\dfrac{2\cdot m+3}{2} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 096

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\left|7\cdot x-5\right|-m\right|=m$ ako je parametar m > 0?

A. točno jedno *B*. točno dva *C*. točno tri *D*. točno četiri

Rezultat: C.

Zadatak 097 (Vlado, tehnička škola)

Koliko rješenja ima jednadžba $\left(f\circ f\right)\left(x\right)=0$, gdje je $f\left(x\right)=\left|x+a\right|$, $a\in R$.

Rješenje 097

Ponovimo!

$$a\ge b \;,\; c<0 \;\Rightarrow\; a\cdot c\le b\cdot c$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = a \ , \ a > \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -a \\ x = a \end{matrix}\right\} \quad , \quad |x| = 0 \ \Rightarrow \ x = 0.$$

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$(f \circ f)(x) = 0 \ \Rightarrow \ f(f(x)) = 0 \ \Rightarrow \ |f(x) + a| = 0 \ \Rightarrow \ ||x + a| + a| = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |x + a| + a = 0 \ \Rightarrow \ |x + a| = -a.$$

Apsolutna vrijednost realnog broja je nenegativan broj pa vrijedi

$$-a \geq 0 \ \Rightarrow \ -a \geq 0 \ / \cdot (-1) \ \Rightarrow \ a \leq 0.$$

Znači da je

$$a \in \langle -\infty, 0].$$

Tada je:

$$|x + a| = -a \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + a = -a \\ x + a = -(-a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + a = -a \\ x + a = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -a - a \\ x + a = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -2 \cdot a \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ x = -2 \cdot a \ , \ a \in \langle -\infty, 0].$$

Vježba 097

Koliko rješenja ima jednadžba $(f \circ f)(x) = 0$, gdje je $f(x) = |x - 2|$.

Rezultat: 0 i 4.

Zadatak 098 (Marijan, tehnička škola)

Riješi nejednadžbu $|x| > x$.

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Preoblikujemo nejednadžbu.

$$|x| > x \Rightarrow |x| - x > 0.$$

Prvi slučaj

$$|x| - x > 0 \Rightarrow [x \geq 0] \Rightarrow x - x > 0 \Rightarrow x - x > 0 \Rightarrow 0 > 0.$$

Nema rješenja.
Drugi slučaj

$$|x| - x > 0 \Rightarrow [x < 0] \Rightarrow -x - x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \; / : (-2) \Rightarrow x < 0.$$

Rješenje je

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Vježba 098

Riješi nejednadžbu $|x| < x.$

Rezultat: Nema rješenja.

Zadatak 099 (Zagi, maturant)

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x|$?

$A. -7 \cdot x - 2$ $B. -3 \cdot x + 4$ $C. 3 \cdot x - 4$ $D. 7 \cdot x + 2$

Rješenje 099

Ponovimo!
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uočimo da za svaki $x \in \langle 1, 3 \rangle$ vrijedi:

- $2 \cdot x + 3 > 0 \Rightarrow |2 \cdot x + 3| = 2 \cdot x + 3$
- $1 - 5 \cdot x < 0 \Rightarrow |1 - 5 \cdot x| = -(1 - 5 \cdot x) = 5 \cdot x - 1.$

Zato je:

$$|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x| = 2 \cdot x + 3 + 5 \cdot x - 1 = 7 \cdot x + 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 099

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|2 \cdot x + 1| + |1 - 5 \cdot x|$?

$A. -7 \cdot x$ $B. -3 \cdot x$ $C. 3 \cdot x$ $D. 7 \cdot x$

Rezultat: D.

Zadatak 100 (Maturant, ekonomska škola)

Riješite sustav jednadžba $\begin{cases} x + y = 6 \\ |x - y| = 3 \cdot x \end{cases}.$

Rješenje 100

Ponovimo!

$$a \geq b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \quad , \quad a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} x + y = 6 \\ |x - y| = 3 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 6 - x \\ |x - y| = 3 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow |x - (6 - x)| = 3 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - 6 + x| = 3 \cdot x \Rightarrow |2 \cdot x - 6| = 3 \cdot x.$$

Zbog definicije apsolutne vrijednosti gledamo dva slučaja.
Prvi slučaj

$$2 \cdot x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot x \geq 6 \Rightarrow 2 \cdot x \geq 6 \ /:2 \Rightarrow x \geq 3.$$

Sada rješavamo jednadžbu.

$$|2 \cdot x - 6| = 3 \cdot x \Rightarrow [2 \cdot x - 6 \geq 0] \Rightarrow 2 \cdot x - 6 = 3 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x - 3 \cdot x = 6 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = 6 \ / \cdot (-1) \Rightarrow x = -6.$$

Zbog x ≥ 3 ne može biti x = – 6.
Drugi slučaj

$$2 \cdot x - 6 < 0 \Rightarrow 2 \cdot x < 6 \Rightarrow 2 \cdot x < 6 \ /:2 \Rightarrow x < 3.$$

Sada rješavamo jednadžbu.

$$|2 \cdot x - 6| = 3 \cdot x \Rightarrow [2 \cdot x - 6 < 0] \Rightarrow -(2 \cdot x - 6) = 3 \cdot x \Rightarrow -2 \cdot x + 6 = 3 \cdot x \Rightarrow -2 \cdot x - 5 \cdot x = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \cdot x = -6 \Rightarrow -5 \cdot x = -6 \ /:(-5) \Rightarrow x = \frac{6}{5}.$$

Zbog x < 3 je $x = \frac{6}{5}$ rješenje jednadžbe. Računamo y.

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{6}{5} \\ y = 6 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 6 - \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{1} - \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{30 - 6}{5} \Rightarrow y = \frac{24}{5}.$$

Rješenje sustava je

$$(x, \ y) = \left(\frac{6}{5}, \ \frac{24}{5}\right).$$

2.inačica

Zbog definicije apsolutne vrijednosti gledamo dva slučaja.
Prvi slučaj

$$x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y.$$

Sada rješavamo sustav jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ |x-y|=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow [\,x-y\geq 0\,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=6+3\cdot x \Rightarrow 2\cdot x-3\cdot x=6 \Rightarrow -x=6 \Rightarrow -x=6\ /\cdot(-1) \Rightarrow x=-6.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-6 \\ x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow -6+y=6 \Rightarrow y=6+6 \Rightarrow y=12.$$

Zbog uvjeta $x \geq y$ nema rješenja jer je $-6 < 12$.

Drugi slučaj

$$x-y<0 \Rightarrow x<y.$$

Sada rješavamo sustav jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ |x-y|=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow [\,x-y<0\,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ -(x-y)=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ -x+y=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ -x+y-3\cdot x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ -4\cdot x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ -4\cdot x+y=0\ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ 4\cdot x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot x=6 \Rightarrow 5\cdot x=6\ /:5 \Rightarrow x=\frac{6}{5}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{6}{5} \\ x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{5}+y=6 \Rightarrow y=6-\frac{6}{5} \Rightarrow y=\frac{6}{1}-\frac{6}{5} \Rightarrow y=\frac{30-6}{5} \Rightarrow y=\frac{24}{5}.$$

Zbog uvjeta $x < y$ postoji rješenje jer je $\frac{6}{5}<\frac{24}{5}$.

Rješenje sustava je

$$(x,\ y)=\left(\frac{6}{5},\ \frac{24}{5}\right).$$

Vježba 100

Odmor!

Rezultat: …